

01 Divisibilité

01-01 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définitions et notations

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Un entier relatif m est un multiple de a si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = ak$.

L'ensemble des multiples de a se note $a\mathbb{Z}$.

L'ensemble des diviseurs d'un entier relatif m dans $\mathbb{Z}$ se note $D(m)$.

Exemples

$$6\mathbb{Z} = \{ \dots ; -12 ; -6 ; 0 ; 6 ; 12 ; 18 ; \dots \}$$

$$D(6) = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$$

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs avec a non nul.

- Si a est un multiple de b alors tous les multiples de a sont des multiples de b .
- Si a est un diviseur de b alors tous les diviseurs de a sont des diviseurs de b .

Exemples

- $24\mathbb{Z} \subset 12\mathbb{Z}$
- $D(6) \subset D(12)$

Propriété

Soient a , b et c trois entiers relatifs avec $a \neq 0$.

Si a divise à la fois b et c alors a divise tout entier qui est combinaison linéaire de b et c , c'est-à-dire tout entier de la forme $bu + cv$ avec u et v deux entiers relatifs.

Démonstration

Il existe deux entiers m et n tels que $b = am$ et $c = an$.

L'entier $bu + cv$ peut donc s'écrire $amu + anu$ ou encore $a(mu + nu)$.

01-01 Applications du cours**Application 1**

Soient a , b et c trois entiers naturels. Examiner le lien logique entre les propositions P_1 et P_2 suivantes :

$$P_1 = \ll a \text{ divise } bc \gg$$

$$P_2 = \ll a \text{ divise } b \text{ ou } c \gg$$

Application 2

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $4n + 1$ divise 7.

Application 3

Déterminer s'il existe un entier naturel n tel que le nombre $3n + 11$ est divisible par 6.

Application 4

Déterminer tous les entiers naturels n tels que 4 divise $n + 13$.

Application 5

Soient a et n deux entiers relatifs. Démontrer que si a divise $2n + 5$ et que a divise $3n - 1$ alors a divise 17.

Application 6

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $2n + 1$ divise $n + 12$.

Application 7

Soient n un entier naturel. Démontrer que $n(n^2 + 5)$ est pair.

Application 8

Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 135$.

Application 9

Un nombre ayant pour écriture décimale 72a83b est divisible par 6 et 45. Quel est ce nombre ?